

VERİ ZARFLAMA ANALİZİ İLE ETKİNLİK ÖLÇÜMÜ VE ETKİN KARAR BİRİMLERİNİN DUYARLILIK ANALİZİ

*Yard. Doç. Dr. Ergün EROĞLU,
İstanbul Üniversitesi İşletme Fakültesi
Sayısal Yöntemler Anabilim Dalı*

*Araş. Gör. Melek Candan ATASOY,
University of Texas at Dallas
Department of Production Management*

ÖZET

Bu çalışmada, Veri Zarflama Analizi kullanılarak birbirine benzer yapıdaki karar birimlerinin etkinlik ölçümü yapılmaktadır. Etkinlik ölçümü yapılırken, Charnes, Cooper ve Rhodes'un (1978) geliştirmiş olduğu "girdiye yönelik CCR modeli" kullanılmaktadır. Veri Zarflama Analizi'nin ardından, etkin olduğu tespit edilen karar birimlerinin etkinliklerinin ayrıntılı olarak incelenmesi amacıyla duyarlılık analizi uygulanmaktadır. Duyarlılık analizi kapsamında girdi ve çıktı kararlılık bölgeleri belirlenmekte, girdi ve çıktı miktarlarındaki değişimlerin etkinlik düzeyleri üzerindeki etkileri incelenmektedir. Ayrıca, faktör ağırlıkları üzerindeki sınırlamalar ile etkin karar birimlerinin etkinlik düzeylerindeki değişimleri gözlemleyen Sınırlı Veri Zarflama Analizi uygulanmaktadır.

Anahtar Kelimeler: Etkinlik, Veri Zarflama Analizi, Duyarlılık Analizi

EFFICIENCY MEASUREMENT WITH DATA ENVELOPMENT ANALYSIS AND SENSITIVITY ANALYSIS OF THE EFFICIENT DECISION MAKING UNITS

ABSTRACT

In this study, Data Envelopment Analysis (DEA) is used to evaluate for measuring the relative efficiency of decision making units. In this procedure input-oriented CCR Model developed by Charnes, Cooper and Rhodes (1978) is used. After evaluating the relative efficiency, sensitivity analysis is performed for an entire research of the efficient units. In the scope of the

sensitivity analysis input stability region and output stability region are determined; it is examined for maintaining the efficiency within the changes in input and output quantities. Furthermore, a Bounded Data Envelopment Analysis Model is applied where bounds are imposed on factor weights to observe for the changes of the efficient decision making units.

Keywords: *Efficiency, Data Envelopment Analysis, Sensitivity Analysis*

GİRİŞ

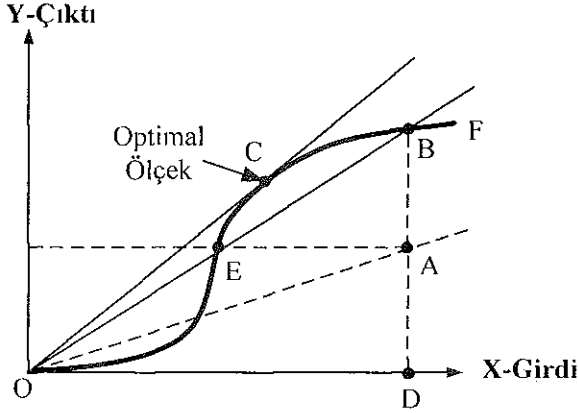
Üretim fonksiyonu, bir üretim sürecinde yer alan girdiler ve çıktılar arasındaki teknik ilişkiyi tanımlamaktadır. Diğer bir ifade ile belirli bir düzeydeki girdi seti ile ulaşılabilecek maksimum çıktıyı ve bu maksimum çıktıya ulaşmayı veya en azından üretim biriminin etkinliğine dayanarak maksimum düzeye yaklaşmayı tanımlamaktadır. Ancak tüm üretim birimlerinin maksimum çıktı düzeyine ulaşması mümkün değildir. Bazıları diğerlerine göre daha iyi performans sergileyecektir. Bu nedenle, gözlem altındaki birimlerin verimliliği veya etkinliği, kullanılan girdilerin istenen düzeyde çıktı oluşturabilmesi açısından, karar verirken araştırmacılar ve yöneticiler için önemli bir değerlendirme kriteridir.

Verimlilik; kısıtlı kaynakların akılcı, topluma ve insana yararlı, doğaya saygılı bir biçimde kullanılarak en etkili sonuçları alabilmek, yaşam kalitesinin yükseltilmesini sağlamak yönündeki çabaların bütünüdür. Verimlilik, basit olarak çıktının girdiye oranıdır. Etkinlik ise, kullanılan kaynaklarla elde edilen başarıyı, yani uygun kaynaklarla ulaşılan maksimum çıktı potansiyelini sağlayan en iyi kullanımı ifade etmektedir. Etkinlik, çıktılar sabit kalırken girdilerin minimize edilmesi veya çıktılar maksimize edilirken girdilerin sabit tutulması veya bunların kombinasyonu ile artırılabilir (Dinç ve Haynes, 1999: 472; Yolalan, 1993).

Verimlilik (productivity) ve etkinlik (efficiency) kavramları literatürde sıklıkla birbirlerinin yerine kullanılmaktadır. Etkinlik ve verimlilik arasındaki fark Şekil-1 yardımıyla açıklanabilir. A, B ve C üç farklı üreticiyi ifade etmektedir. x eksenini girdi miktarlarını ve y eksenini çıktı miktarlarını göstermek üzere, A noktasının verimliliği DA/OD oranıyla hesaplanır. Yani A'nın verimliliği, bu noktadan orijine çizilen doğrunun eğimidir.

Bu veriler ışığında, girdi düzeyini A noktasından B noktasına kaydırarak verimlilik artırılabilir. Bu durumda elde edilen yeni verimlilik düzeyi BD/OD oranıdır. A noktasının etkinliği ise; A noktasına ait verimliliğin, B noktasına ait verimliliğe oranıdır.

Bu oran, $(AD/OD)/(BD/OD) = AD/BD$ ye eşittir.



Şekil 1. Verimliliğin ve etkinliğin gösterimi (Coelli v.d., 1998: 5)

Yukarıda verilen etkinlik tanımı ekonomide *teknik etkinlik* terimi ile ifade edilir. Teknik etkinlik, üretici aynı girdi düzeyi ile çıktısını artırırsa çıktı odaklı (output oriented), aynı çıktı düzeyi için gerekli girdi miktarını azaltırsa girdi odaklıdır (input oriented). Üretim sınırı olarak ifade edilen OF eğrisi üzerindeki her nokta teknik etkinliğe sahip olmasına karşın bu sınırın altında veya sağında kalan diğer tüm noktalar teknik etkin değildir (Çingi ve Tarım, 2000: 3).

Geleneksel istatistik yaklaşımları etkinlik konusunu, özellikle çoklu girdi ve çoklu çıktı söz konusu ise, tam olarak ifade edememektedir. Diğer taraftan Veri Zarflama Analizi (VZA), çoklu girdi ve çoklu çıktıların göreceli etkinliklerinin ölçülmesinde, parametrik olmayan bir matematik programlama tekniği olarak kullanılmaktadır. VZA, analiz içerisinde yer alan tüm Karar Birimlerinin (KB) etkinlik sınırında veya bu sınırın altında yer alacağı varsayımı ışığında, incelenen KB'nin diğer KB'leri ile karşılaştırmalı olarak etkinliğini irdelemektedir. KB terimi de, karşılaştırılabilir girdilerin çıktılara dönüştüğü bir dizi varlığı ifade etmektedir. KB olarak; okullar, bankalar ve banka şubeleri ve hatta bireyler örnek olarak gösterilebilir (Thomas ve diğerleri, 1998: 489).

Geleneksel VZA modellerinde, girdi ve çıktılara ait sayısal değerlerin bilindiği varsayımı kabul edilerek, etkinlik ve etkinsizlik sınıflandırmaları yapılmıştır. Ancak bazı uygulamalarda veriler tam olarak gerçeği yansıtmayabileceği gibi, bazen de belirli aralıklar içerisinde biliniyor olabilir. Bu nedenle analizin tutarlılığının sağlanabilmesi için, geleneksel

yöntemle elde edilen sonuçların veya girdi ve çıktıların kararlılığının ölçülmesine ihtiyaç duyulmaktadır. VZA literatüründe duyarlılık analizi, KB'lerinin eklenmesi veya çıkarılması, girdi veya çıktıların eklenmesi veya çıkarılması ve girdilerin veya çıktıların artırılması veya azaltılması gibi çok çeşitli formlarda incelenmiştir. Bu çalışmada da, her bir KB için etkinlik sınıflandırmasının kararlılığı, bu yöntemlerin ışığı altında duyarlılık analizi ile belirlenmeye çalışılmıştır.

1. VERİ ZARFLAMA ANALİZİ (VZA)

Farell'in 1957 yılında üretken etkinlik ölçümü çalışmasının ardından Charnes ve diğerleri (1978) tarafından geliştirilen VZA, etkinlik ölçümünde yaygın olarak kullanılan ampirik bir yöntemdir. Bu yöntem, her bir operasyonel birime (karar birimine) ait belirli bir girdi setinin, örnek içerisinde görece olarak en iyi performansı gösteren birime göre, ne kadar başarılı bir şekilde çıktıları dönüştüğünü gözlemleyen etkinlik skorlarına dayanmaktadır (Hughes ve Yaisawarng, 2004: 410). VZA, karar birimlerinin etkinlik skorlarını hesaplama sürecinde, lineer programlamayı kullanan parametrik olmayan bir tekniktir (Parkan ve Ming-Lu, 1999: 205). Bu analiz ile, her bir KB için karşılaştırma yapmayı kolaylaştıracak tek bir skor belirlenmektedir. Yöntem, eşzamanlı olarak çoklu girdi ve çıktıları, bunların görece önem derecelerini göz önüne almadan değerlendirme yeteneğine sahiptir. Bu nedenle, parametrik bir girdi ve çıktı üretim fonksiyonuna ihtiyaç duymaz (Sowlati ve Paradi, 2004: 261). VZA, sınır üzerinde yer alan tüm noktaların etkin olarak algılandığı bir sınır metodudur (Zhu, 2001: 443). Lineer programlama tekniklerini kullanarak, "en iyi uygulama" gözlemine dayanan bir etkin üretim sınırı oluşturur. Her bir birimin etkinliği, gözlenen en iyi birime göre ölçülür (Chaparro, Jimenez ve Smith, 1997: 215-230). VZA, en küçük kareler yönteminde olduğu gibi, merkezi eğilimlerden ziyade, etkin sınırlar üzerine odaklanır ve etkin gözlemleri kapsayan (zarflayan) kesikli bir düzlem oluşturur. Bu nedenle VZA, her bir gözlemi ayrı ayrı değerlendirerek, mevcut gözlemi yalnızca en yakın etkin birimlerle karşılaştırır (Thomas ve diğerleri, 1998: 489). Sınır üzerindeki birimler, 1.0 skoruyla etkin birimlerdir ve sınır üzerinde yer almayan diğer birimler etkin olmayan birimler olarak değerlendirilir. Etkinsizliğin düzeyi de birimlerin sınırdan uzaklığına göre ölçülür. VZA, karar verme birimlerinin etkinlik değerlerinin hesaplanmasına olanak verirken, diğer bir yandan karar verme birimleri arasında en iyi performansa sahip olanların seçilmesi ve bu birimler kullanılarak bir etkin sınır oluşturulması yoluyla karar verme birimleri arasında kıyaslama olanağı da vermektedir. VZA'nın önemli avantajlarından

birisi, etkin olmayan birimler için performans hedefleri tanımlama ve sınır etkinliğine ulaşabilmek için ne gibi gelişmelerin yapılabileceğini belirleme yeteneğidir (Sowlati ve Paradi, 2004: 261).

Analiz edilecek problemde her birinin m adet girdisi ve s adet çıktısı olan n adet karar birimi bulunsun. $x_{ij} > 0$ parametresi, j karar birimi tarafından kullanılan i girdi miktarını göstermektedir. Benzer şekilde $y_{rj} > 0$ parametresi, j karar birimi tarafından üretilen r çıktı miktarını göstermektedir. Bu karar birimi için değişkenler, 0 karar biriminin i girdi ve r çıktıları için vereceği ağırlıklardır. Bu ağırlıklar sırasıyla v_i ve u_r olarak gösterilmektedir. Bu aşamada problem, n tane karar birimi için n tane kesirli doğrusal programlama modelinin formülasyonu olarak ifade edilebilir. Kesirli doğrusal programlama modelinin amaç fonksiyonu, verimlilik tanımından hareketle, 0 karar birimi için toplam ağırlıklandırılmış çıktıların toplam ağırlıklandırılmış girdilere oranının maksimizasyonudur (Cingi ve Tarım, 2000: 6).

Charnes ve diğerleri (1978), kesirli programlama modelini doğrusal programlama modeline dönüştürmüşler ve elde edilen bu modeli de Simpleks Algoritması yardımıyla çözmüşlerdir. CCR modeli, referans KB'nin test etkinlik değerini maksimum yapacak amaç referans seti arasından girdi-çıktı ölçüleri ve ağırlıkların optimal seçimiyle sağlanır. Maksimum etkinlik "1" olarak sınırlanır. Bu çalışma kapsamında sadece, girdi odaklı primal CCR doğrusal programlama modeli üzerinde durulacaktır. Model aşağıdaki gibidir:

$$\text{Max } h_0 = \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{r0}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{i0}}$$

Kısıtlar

$$\frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}} \leq 1 ; j = 1, \dots, n,$$

$$v_i \geq 0 ; u_r \geq 0 ; i = 1, \dots, m \quad r = 1, \dots, s \quad (1)$$

(Charnes, Cooper ve Rhodes, 1978: 431 ve Pedraja ve diğerleri., 1997:216)

Bu analizin yapısı itibarıyla, örnek hacimleri arasındaki ilişkiler, model değişkenlerinin sayısı ve benzeri faktörler VZA sonuçlarını etkileyebilmektedir. Örneğin, belirli bir örnek hacmi için modelin değişkenlerini artırmak, örnek içerisindeki KB'lerinin daha yüksek bir etkinlik skoruna ulaşmalarına neden olabilecektir. Benzer şekilde, modele ait belirli sayıdaki değişkenler için KB'lerinin azaltılması da, yine daha yüksek etkinlik skoruyla sonuçlanabilecektir. Bu ve benzer şekillerde karşılaşılabilecek durumların çözüm yollarından biri, analize dahil olan verilerin kısmi veya bütün olarak duyarlılık analizi ile test edilmesidir.

2. DUYARLILIK ANALİZİ

Benzer karar birimlerinin etkinliklerinin ölçümü için oluşturulan doğrusal programlama modelinin optimum çözümünü bulmak önemlidir, ancak bu çözüm eldeki tek bilgi değildir. Modelin optimum çözümü bilgisi dışında model ile ilgili bir çok duyarlılık bilgisi bulunmaktadır. "Veriler, değiştiği anda optimal kararlar üzerinde ne gibi etkiler yaratacaktır?" sorusunun cevabı, *duyarlılık analizleri* yapılarak elde edilebilir. Örneğin, girdi veya çıktı düzeylerinin değiştirilmesi ile belirli bir karar biriminin etkinliğinin ne şekilde değişim göstereceği yapılacak duyarlılık analizleri ile belirlenir.

VZA'nın amacı KB'lerini etkin ve etkin olmayan olmak üzere iki gruba ayırmaktır. Ancak tanımlanmış etkin olan ve etkin olmayan karar birimleri için, veriler içerisinde mümkün değişimlerin olması halinde, elde edilen sonuçların ne kadar hassas olduğu sorusu gündeme gelebilmektedir (Jahanshahloo ve diğerleri, 2004: 466). Bu durumda, duyarlılık analizi VZA içerisinde etkinlik sınırının kararlılığının belirlenmesi konusunda, KB'lerine ait girdi ve çıktıların bir kısmının veya tamamının değiştirilmesi ile karşılaştırılarak kullanılmaktadır.

2. 1 Literatür İncelemesi

1957 den günümüze kadar VZA ile ilgili pek çok çalışma bulunmasına rağmen, kararlılık bölgeleri ve S-VZA ile ilgili az sayıda makale yayımlanmıştır. Charnes ve diğerleri (1985), etkin bir KB'ne ait temel matrisin tersini alarak güncelleştirdiği bir VZA lineer programlama problemi olarak, tek bir çıktı değişimi için VZA'da duyarlılık analizi çalışmasını gerçekleştirmişlerdir. Ramanathan (2006) yaptığı çalışmada DEA ve Malmquist Toplam Üretkenlik Endeksini kullanarak Ortadoğu ve Kuzey Afrika ülkelerinin gelişmişlik düzeylerini karşılaştırmıştır. DEA duyarlılığı

ile ilgili olarak, Charnes ve Neralic, uygun koşullar altında etkinliğin korunduğu bir kaç makale yayınlamışlardır (Zhu, 2001: 443-444). Bunun dışında, Thompson ve diğerleri (1997) VZA'da duyarlılık analizi, Roll ve diğerleri (1991) ile Jahanshahloo ve diğerleri (2005) de sayısal veriler kullanarak faktör ağırlıkları üzerinde yönetici kararlarının etkili olduğu sınırlı VZA çalışmaları yapmışlardır. Boljuncic (2006) yaptığı değişen getiriye göre etkin KB'lerin duyarlılık analizini incelemiştir. Özellikle ülkemizde VZA'da duyarlılık analizi çalışmaları yok denecek kadar azdır.

2. 2 Girdi ve Çıktı Kararlılık Bölgeleri

Kararlılık bölgelerinin tespiti için yapılan duyarlılık analizinde, etkin KB'leri için hesaplanan kararlılık bölgeleri ile etkin KB'lerinin hangi sınırlar dahilinde yine etkin kalacağı belirlenmesi amaçlanmaktadır.

Tüm çıktılar ve diğer etkin KB'lerinin girdileri sabit kalmak koşuluyla, seçilen etkin KB'nin girdilerinde yapılan değişiklik sonucunda etkinliğin bozulmadığı girdi aralığı belirlenmektedir. Bu aralığa "Girdi Kararlılık Bölgesi - GKB"; benzer şekilde, tüm girdiler ve diğer etkin KB'lerinin çıktıları sabit kalmak koşuluyla, seçilen etkin KB'nin çıktılarında yapılan değişiklik sonucunda etkinliğin bozulmadığı çıktı aralığı belirlenmektedir. Bu aralığa da "Çıktı Kararlılık Bölgesi - ÇKB" adı verilir.

Girdilerdeki oransal bir artış ($\hat{x}_{i0} = \beta_i x_{i0}$, $\beta_i \geq 1$, $i = 1, \dots, m$) veya çıktılardaki oransal bir azalış ($\hat{y}_{r0} = \alpha_r y_{r0}$, $0 < \alpha_r \leq 1$, $r = 1, \dots, s$) varsayımı altında; girdi ve çıktı kararlılık bölgelerinin oluşturulmasında kullanılan matematiksel modeller aşağıdaki gibidir (Seiford and Zhu, 1998):

Girdi Kararlılık Bölgesi için;

Çıktı Kararlılık Bölgesi için;

Min β_k^0 her bir $k = 1, \dots, m$

Kısıtlar

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j x_{kj} \leq \beta_k^0 x_{k0}$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \leq x_{i0}, \quad i \neq k$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} \leq y_{r0}, \quad r=1, \dots, s$$

$$\lambda_j \beta_{k0} \geq 0 \quad (2)$$

Maks α_k^0 her bir $k = 1, \dots, m$

Kısıtlar

$$\sum_{j=1, j \neq 0}^n \lambda_j x_{kj} \leq \alpha_k^0 y_{r0}$$

$$\sum_{j=1, j \neq 0}^n \lambda_j x_{rj} \geq y_{r0}, \quad r \neq k$$

$$\sum_{j=1, j \neq 0}^n \lambda_j x_{ij} \leq x_{i0}, \quad i=1, \dots, m$$

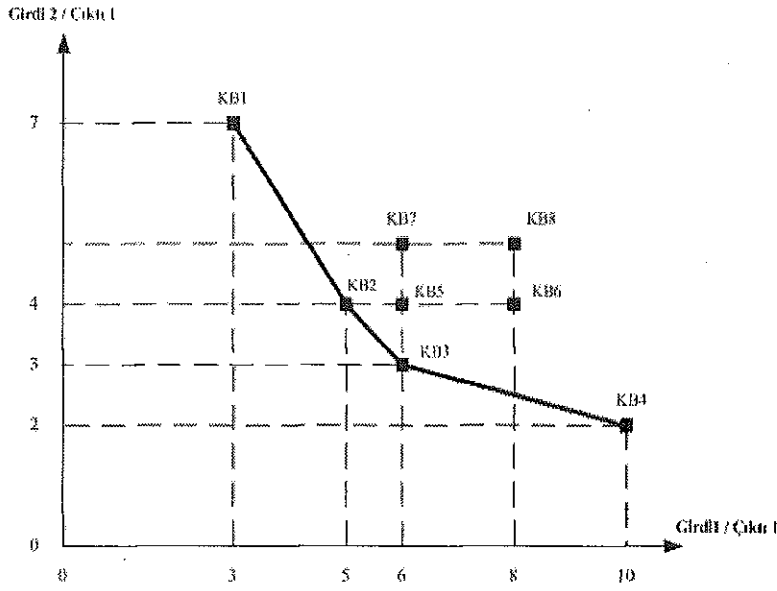
$$\lambda_j \alpha_{k0} \geq 0$$

x_{i0} ($i=1, 2, \dots, m$) ve y_{r0} ($r=1, 2, \dots, s$) sırasıyla girdileri ve çıktıları; x_{ij} ve y_{ij} , KB_j ($j=1, 2, \dots, n$)'nin i . girdisini ve r . çıktısını belirtmektedir (Seiford and Zhu, 1998: 2-9).

Yukarıda girdi ve çıktı kararlılık bölgelerinin belirlenmesi ile ilgili verilen teorik ifadelerin daha iyi anlaşılabilmesi açısından, iki girdisi ve bir çıktısı olan sekiz KB'nin Tablo 1'deki verileri ile bir örnek uygulama yapılmaktadır.

Tablo 1. Örnek uygulama verileri

KB	KB1	KB2	KB3	KB4	KB5	KB6	KB7	KB8
Girdi 1	3	5	6	10	6	8	6	8
Girdi 2	7	4	3	2	4	4	5	5
Çıktı 1	1	1	1	1	1	1	1	1
Etkinlik	1.00	1.00	1.00	1.00	0.90	0.75	0.82	0.69



Şekil 2. Uygulama verilerine ilişkin oluşan etkinlik sınırı

Tablo 2. Uygulama verileri için duyarlılık analizi sonuçları

Karar Birimleri	GKB		ÇKB
	Girdi 1	Girdi 2	Çıktı 1
KB1	$1 < \beta_1 \leq 1.6667$	$1 < \beta_2 < \infty$	$0.6000 < \alpha_1 \leq 1$
KB2	$1 < \beta_1 \leq 1.0500$	$1 < \beta_1 \leq 1.0833$	$0.9697 < \alpha_1 \leq 1$
KB3	$1 < \beta_1 \leq 1.2500$	$1 < \beta_1 \leq 1.2000$	$0.9000 < \alpha_1 \leq 1$
KB4	$1 < \beta_1 < \infty$	$1 < \beta_1 \leq 1.5000$	$0.6667 < \alpha_1 \leq 1$

KB1 için yapılan analiz sonucu β_1 değeri, 1.6667 olarak elde edilmiştir. Elde edilen bu değer kullanılarak, KB1'in etkinliğinin değişmeyeceği girdi artış aralığı belirlenmektedir. Yani Girdi 1, $1 \cdot 3 \leq x_{10} \leq 1.6667 \cdot 3$ ($\hat{x}_{10} = \beta_1 \cdot x_{10}$) aralığında kaldığı sürece KB1'in etkinliği aynı kalmaktadır. Bir başka ifade ile, 3 birim olan Girdi 1'in, β_1 değeri (1.6667) ile çarpılması sonucunda KB2'nin Girdi 1 değerine (5 birim) kaydırılması anlamına gelmektedir. Bu durumda, etkin sınır kaymasına rağmen KB1'in etkinliği değişmemektedir. Bu durumun tersi de

mümkündür. Yani, eğer Girdi 1'in değeri 3 birim değil de 5 birim olsaydı, bu 5 birim β_1 'e bölünerek 3 değeri bulunacak ve yine etkinlik değişmeyecekti. β_2 için ise farklı bir durum söz konusudur. Yapılan analiz sonucunda β_2 değerinin ∞ çıkması, KB1'in Girdi 2'nin artışına karşı duyarsız olduğu yorumu yapılmaktadır. Diğer bir deyişle, Girdi 2'de meydana gelen artışlar KB1'in etkinliğini değiştirmeyecektir. Girdi 2'nin azaltılması düşünülürse, Girdi 2'nin değeri, KB 2 ve KB 3'ün oluşturduğu doğrusal etkin sınırın eğimi değiştirilmeden, etkin sınırın uzantısına değene kadar azaltılabilmektedir. Bu durumda da KB1 yine etkin sınır üzerinde kalmakta ancak etkin olmayan karar birimlerin eş grupları değişmektedir.

KB1'e ait Çıktı 1 için, analiz sonucu elde edilen α_1 'in 0.6 bulunması, Çıktı 1'in α_1 ile çarpılması ile elde edilen değere kadar sınırın kaydırılmasına rağmen etkinliğin bozulmadığı yorumu yapılmaktadır.

2. 2 Sınırlı Veri Zarflama Analizi

VZA'da yapılan duyarlılık analizlerinin tek amacı, etkinlik sınırı için yapılan değişimleri gözlemlemek değil aynı zamanda analiz kapsamındaki diğer parametrelerin de duyarlılığın tespit ederek etkinlik üzerinde yaratacağı etkileri belirlemektir. Bu analizlerden biri faktör ağırlıkları üzerinde yapılan değişikliklerle etkinlik sınırının kararlılığının ölçülmesi olan "Sınırlı Veri Zarflama Analizi Modeli (S-VZA) (Restricted or Bounded DEA)"dir.

Çok sayıda girdi ve çıktıya sahip olan KB'lerinin etkinliklerinin VZA kullanılarak hesaplanması sonucunda elde edilen faktör (girdi veya çıktılar) ağırlıkları çok küçük değerler alabilmektedir. Hatta bazen bunların bir kaçısı sıfır değerine sahip olabilmektedir. Bu durumda, herhangi bir karar biriminin herhangi bir girdi veya çıktısının etkinlik hesabındaki ağırlığı çok küçük olmakta veya bu ağırlığın hiçbir etkisi bulunmamaktadır. Eğer karar vericiler, çok küçük veya sıfır ağırlığa sahip herhangi bir faktörün gerçekte belirli bir ağırlıkla etkin olması gerektiğini düşünürlerse, bu durumda etkinlik analizi için kurulan doğrusal programlama modelinde ağırlıklar için istenen sınır belirlenmelidir. Bu şekilde belirlenen değişkenler (ağırlıklar) için sınır (kısıt) getirilmesi ile oluşturulan modele S-VZA denir (Roll v.d., 1991: 3). Ağırlıkların sınırlandırılması, KB'lerinden bazılarının etkinliğinin azalmasına neden olmaktadır. Özellikle, etkin sınır üzerinde bulunan KB'lerinin bazıları için, S-VZA modeli kullanılarak yapılan analiz sonucunda, hangi KB'lerinin etkinliklerinin azaldığı ve/veya hangi

KB'lerinin her durumda etkin olduğu gözlemlenmektedir. S-VZA'ne ait matematiksel model aşağıdaki gibidir:

$$\max \phi_0 = \sum_{r=1}^s u_r y_{r0}$$

Kısıtlar

$$\sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} \leq 0 ; j = 1, \dots, n$$

$$\sum_{i=1}^m v_i x_{i0} = 1$$

(3)

$$u_r \geq a_r ; u_r \leq b_r ; r = 1, \dots, s$$

$$v_i \geq a_i ; v_i \leq b_i ; i = 1, \dots, m$$

a_r ve a_i : ağırlıklara ilişkin alt sınırlar

b_r ve b_i : ağırlıklara ilişkin üst sınırlar

S-VZA'ya ait uygulama, Tablo 3'teki veriler kullanılarak bir sonraki bölümde yapılmaktadır.

3. UYGULAMA

Bu bölümde, bir işletmeye ait iki adet girdi ve iki adet çıktıya sahip on beş karar biriminden elde edilen veriler kullanılarak yukarıdaki bölümlerde anlatılmış olan teorik açıklamaları destekleyen etkinlik ve duyarlılık analizi uygulamaları yapılmaktadır.

Bu işletmeye ait karar birimlerinin girdi ve çıktılarına ilişkin sayısal veriler, minimum değer baz alınarak normalleştirilmiştir. Diğer veriler bu dönüşüme uygun olarak aynı oranda küçültülerek, elde edilen uygulama verileri ve uygulama verilerine ait bulunan istatistiksel değerler Tablo 3 ve Tablo 4'te listelenmektedir.

Tablo 3. Normalleştirilmiş uygulama verileri

Karar Birimleri	Girdi 1	Girdi 2	Çıktı 1	Çıktı 2
KB 1	1.70	1.38	1.84	1.10
KB 2	1.90	1.86	1.38	1.50
KB 3	1.50	1.19	1.09	1.48
KB 4	1.60	1.76	1.69	1.33
KB 5	1.20	1.86	1.06	1.25
KB 6	1.70	1.10	1.66	1.45
KB 7	1.80	1.71	1.31	1.00
KB 8	1.30	1.90	1.63	1.15
KB 9	1.20	1.00	1.00	1.03
KB 10	1.40	1.19	1.69	1.10
KB 11	1.20	1.43	1.47	1.40
KB 12	1.90	1.38	1.28	1.25
KB 13	1.00	1.71	1.50	1.50
KB 14	1.90	1.48	1.28	1.28
KB 15	1.30	1.86	1.16	1.43

Tablo 4. Normalleştirilmiş verilere ilişkin istatistiksel ölçüler

	İstatistiksel Ölçüler			
Minimum	1.00	1.00	1.00	1.00
Maksimum	1.90	1.90	1.84	1.50
Ortalama	1.51	1.52	1.40	1.28
Std. Sapma	0.30	0.31	0.26	0.18

Tablo 3'te hesaplanmış olan normalleştirilmiş veriler kullanılarak, bu işletmeye ait on beş KB'nin görelî etkinlikleri Veri Zarflama Analizi'nin girdi odaklı CCR Modeli (1) ile hesaplanmaktadır.

Tanımlanan çıktı ve girdilere göre KB'lerin etkinlikleri ölçülürken MS Excel Çözücü ve Lindo 6.0 paket programı kullanılmıştır.

Etkinlik skorları birinci sütunda, girdi ağırlıkları sırasıyla ikinci ve üçüncü sütunlarda, çıktı ağırlıkları da sırasıyla dördüncü ve beşinci sütunlarda ve etkin olmayan KB'lere ilişkin etkin KB'lerin oluşturduğu referans kümeleri son sütunda bulunan sonuçlar Tablo 5'te özetlenmektedir.

Tablo 5. Veri zarflama analizi sonucu girdi-çıkıtlı ağırlıkları ve referans kümeleri

KB	Etkinlik (%)	Girdi Ağırlıkları		Çıktı Ağırlıkları		Referans Kümesi
		v_1	v_2	u_1	u_2	
KB 1	93.01	0.1218	0.5746	0.5055	0.0000	6 (0.18) 10 (0.92)
KB 2	73.38	0.2388	0.2937	0.0602	0.4338	3 (0.43) 6 (0.23) 13 (0.35)
KB 3	100.00	0.3374	0.4151	0.0851	0.6130	7
KB 4	82.41	0.3080	0.2882	0.3168	0.2171	6 (0.05) 10 (0.59) 13 (0.40)
KB 5	73.86	0.3205	0.3309	0.0000	0.5908	3 (0.10) 13 (0.73)
KB 6	100.00	0.3625	0.3488	0.3475	0.2919	8
KB 7	60.36	0.2941	0.2752	0.3025	0.2073	6 (0.14) 10 (0.48) 13 (0.18)
KB 8	88.59	0.4987	0.1851	0.5435	0.0000	10 (0.24) 13 (0.82)
KB 9	87.01	0.4115	0.5062	0.1038	0.7476	3 (0.24) 6 (0.32) 13 (0.13)
KB 10	100.00	0.3979	0.3722	0.4092	0.2804	4
KB 11	98.49	0.3379	0.4157	0.0852	0.6140	3 (0.00) 6 (0.34) 13 (0.61)
KB 12	72.10	0.2779	0.3420	0.0701	0.5050	3 (0.23) 6 (0.57) 13 (0.05)
KB 13	100.00	0.3565	0.3763	0.2541	0.4126	10
KB 14	71.18	0.2688	0.3307	0.0678	0.4883	3 (0.27) 6 (0.49) 13 (0.11)
KB 15	81.87	0.3105	0.3206	0.0000	0.5725	3 (0.22) 13 (0.74)

Analiz sonucuna göre KB 3, KB 6, KB 10 ve KB 13 1.00 (%100) skoruyla etkin olarak bulunmuş olup minimum etkinlik değeri KB 7 ile 0.6036 (%60.36) olarak tespit edilmiştir.

İkinci aşamada aynı veriler (2) modeli kullanılarak etkin olarak bulunmuş olan KB'lere ilişkin GKB ve ÇKB hesaplanmakta ve sonuçlar Tablo 6'da sunulmaktadır.

Tablo 6. Uygulama verileri için duyarlılık analizi sonuçları

KB	GKB		ÇKB	
	Girdi 1	Girdi 2	Çıktı 1	Çıktı 2
KB3	$1 < \beta_1 \leq 1.0973$	$1 < \beta_2 \leq 1.0925$	$0.9323 < \alpha_1 \leq 1$	$0.5652 < \alpha_2 \leq 1$
KB6	$1 < \beta_1 < \infty$	$1 < \beta_2 \leq 1.2468$	$0.6899 < \alpha_1 \leq 1$	$0.6513 < \alpha_2 \leq 1$
KB10	$1 < \beta_1 \leq 1.1788$	$1 < \beta_2 \leq 1.2708$	$0.5736 < \alpha_1 \leq 1$	$0.7071 < \alpha_2 \leq 1$
KB13	$1 < \beta_1 \leq 1.2857$	$1 < \beta_2 < \infty$	$0.6497 < \alpha_1 \leq 1$	$0.6667 < \alpha_2 \leq 1$

Üçüncü aşamada (3) modeli ve Tablo 5'te özetlenen VZA sonuçları ile yönetici kararları ile belirlenen faktör ağırlıkları (Tablo 7) kullanılarak (Roll, Cook and Golany, 1991), S-VZA uygulaması yapılmakta ve bulunan sonuçlar Tablo 8.1 ve Tablo 8.2'de verilmektedir .

Tablo 7. S-VZA için belirlenen faktör ağırlıkları

	N_2	N_2	M_2	M_2
Alt sınır	0.3000	0.3000	0.1500	0.2500
Üst sınır	0.3700	0.4000	0.3800	0.6000
Orta sınır	0.3350	0.3500	0.2650	0.4250

Tablo 8.1 S-VZA sonuçları

VZA Etkinliği	Faktör Ağırlıkları				S-VZA Etkinlik	Orta Sınır
	v_2	v_2	u_2	u_2		
93.01	0.3324	0.3151	0.3309	0.2500	88.38	77.89
73.38	0.3000	0.2312	0.2135	0.2500	66.97	64.81
100.00	0.3493	0.4000	0.1500	0.5389	96.11	93.62
82.41	0.2950	0.3000	0.1500	0.3887	77.04	76.34
73.86	0.3016	0.3430	0.1500	0.4421	71.17	70.06
100.00	0.3294	0.4000	0.3800	0.2546	100.00	100.00
60.36	0.2706	0.3000	0.2575	0.2500	58.73	54.41
88.59	0.3211	0.3067	0.3136	0.2500	79.87	73.75
87.01	0.3700	0.5560	0.2233	0.6000	84.13	84.07

Tablo 8.2 S-VZA sonuçlarının devamı

VZA Etkinliği	Faktör Ağırlıkları				S-VZA Etkinlik	Orta Sınır
	v_2	v_2	u_2	u_2		
100.00	0.3743	0.4000	0.3800	0.3072	98.02	88.34
98.49	0.3567	0.4000	0.1922	0.5016	98.47	96.89
72.10	0.3000	0.3116	0.2271	0.3281	70.08	66.01
100.00	0.3358	0.3884	0.1500	0.5167	100.00	98.92
71.18	0.2926	0.3000	0.1500	0.3871	68.75	64.43
81.87	0.3000	0.3280	0.1500	0.4239	78.01	76.26

SONUÇ

İlk olarak Charnes, Cooper ve Rhodes (CCR) tarafından çalışılmış ve ardından Banker, Charnes ve Cooper (BCC) (Banker, Charnes ve Coopers, 1984: 1078-1092) tarafından geliştirilmiş olan VZA teorik olarak kuvvetli bir etkinlik analizi olmasına rağmen günlük yaşamda katı varsayımları gerçekleştirmek her zaman için mümkün olamamaktadır.

Bu nedenle çalışmada, VZA'nın yanında Duyarlılık Analizi ile ilgili teorik açıklamalar yapılarak bir işletme uygulaması yardımıyla teori desteklenmektedir. VZA sonucunda 15 KB'den 4 KB etkin bulunmakta ve bu etkin KB'lerine ait girdi ve çıktıların kararlılık bölgeleri belirlenmektedir. Böylece etkin KB'lerinin etkinlik sınırı üzerinde kalmasını sağlayan girdi ve çıktı aralıkları tespit edilmektedir. Ayrıca VZA sonuçlarına göre elde edilen girdi-çıkıtı ağırlıklarının önem derecelerinin karar vericiler tarafından değiştirilmesi gerektiği varsayımı altında S-VZA (VZA da duyarlılık analizi) yapılmaktadır. S-VZA sonuçlarına göre, VZA ile elde edilen etkinlik düzeylerinin genel olarak azaldığı gözlemlenmektedir. Ancak farklı minimum ve maksimum ağırlıklar için ve farklı varsayımlar altında etkinlik düzeyleri değişim gösterecektir.

Özellikle yöneticiler, süreç sonu oluşan çıktılarında herhangi bir değişim olmadan girdilerinde olan atıl kapasiteleri azaltabildikleri takdirde, benzer şekilde girdilerini sabit tutmak kaydı ile çıktı miktarlarını arttırarak yine kendi karar birimlerinin etkinliklerini yükseltebilirler.

Bu makalede yer alan teori ve uygulama çerçevesinde, farklı sektörlerdeki birden fazla girdiye ve birden fazla çıktıya sahip benzer KB'lerine sahip işletmeler sahip oldukları KB'lerinin verimlilik ve etkinliklerini ölçebilir ve duyarlılıklarını inceleyebilir.

KAYNAKLAR

- BANKER, R.D., A. CHARNES and W.W. COOPER, 1984, "Some models for estimating technical and scale inefficiencies in data envelopment analysis", *Management Science*, Vol.30, No: 9, pp.1078-1092.
- BOLIUNCIC, V., 2006, "Sensitivity analysis of an efficient DMU in DEA model with variable returns to scale", *Journal of Prod. Anal*, 25:173-192.
- CHAPARRO, F.P., J.S. JIMENEZ and P. SMITH, 1997, "On the role of weight restrictions in data envelopment analysis", *Journal of Productivity Analysis*, Vol.8, pp.215-230.
- CHARNES, A, COOPER, W.W., GOLANY, B, SEIFORD, L, STUTZ, J., 1985, "Foundations of data envelopment analysis for Pareto Koopmans efficient empirical production functions", *Journal of Econ.*, Vol. 30 pp.91-107.
- CHARNES, A., W.W. COOPER, and E. RHODES, 1978, "Measuring the Efficiency of Decision Making Units," *European Journal of Operational Research*, Vol. 2, 429-444.
- COELLİ, T.J., D.S.P. RAO, and G.E. BATTESE, 1998, **An Introduction to Efficiency and Productivity Analysis**, Kluwer, Boston.
- ÇİNGİ, S. ve Ş.A. TARIM, 2000, "Türk Banka Sisteminde Performans Ölçümü DEA – Malmquist TFP Endeksi Uygulaması", İstanbul, Türkiye Bankalar Birliği, Araştırma Tebliğleri Serisi, Sayı: 2000-01.
- DİNÇ, M. and K.E. HAYNES, 1999, "Sources of Regional Inefficiency: An Integrated Shift-Share, Data Envelopment Analysis and Input-Output Approach," *The Annals of Regional Science*, Vol: 33, 469-489.
- FARRELL, M.J., 1957, "The Measurement of Productivity Efficiency", *Journal of the Royal Statistical Society, A CXX*, part 3, 253-290.
- HUGHES, A. and S. YAİSAWARNG, 2004, "Sensitivity and Dimensionality Tests of DEA efficiency Scores," *European Journal of Operational Research*, 154, 410-422.
- JAHANSHALOO, G.R., F.H. LOFTI and M. MORADI, 2004, "Sensitivity and Stability Analysis in DEA with Interval Data," *Applied Mathematics and Computation*, 156, 463-477.

- JAHANSHAHLOO, G.R., A. MEMARIANI, F. HOSSEINZADEH, and N. SHOJA, 2005, "A Feasible Interval for Weights in Data Envelopment Analysis" *Applied Mathematics and Computation*, 160, 155-168.
- PARKAN, Ç. and W. MING-LU, 1999, "Measurement of The Performance of an Investment Bank Using The Operational Competitiveness Rating Procedure" *The Int. Journal of Management Science*, 27, 201-217.
- PEDRAJA C., J.J.F. SALINAS, and P.S. JIMENEZ, 1997, "On The Role of Weight Restrictions in Data Envelopment Analysis" *Journal of Productivity Analysis*, Vol: 8, 215-230.
- RAMANATHAN, R., 2006, "Evaluating the comparative performance of countries of the Middle East and North Africa: A DEA application", *Socio-Economic Planning Sciences*, 40, 156-167.
- ROLL, Y., W.D. COOK, and B. GOLANY, 1991, "Controlling Factor Weights in Data Envelopment Analysis", *IIE Transactions*, 23, 1, 2-9.
- SEIFORD, L.M. and J. ZHU, 1998, "Stability Regions for Maintaining Efficiency in Data Envelopment Analysis", *European Journal of Operation Research*, 108, 127-139.
- SOWLATI, T. and J.C. PARADI, 2004, "Establishing The 'Practical Frontier' in Data Envelopment Analysis," *The International Journal of Management Science*, Vol: 32, 261-272.
- THOMAS, R.R., R.S. BARR, W.L. CRON and J.W. SLOCUM, 1998, "A Process for Evaluating Retail Store Efficiency: A Restricted DEA Approach," *International Journal of Research in Marketing*, 15, 487-503.
- THOMPSON, R.G., *et al.*, 1997, "DEA-AR Profit Ratios and Sensitivity of 100 Large US Banks", *European Journal of Operational Research*, 98, 213-229.
- YOLALAN, R., 1993, "İşletmelerarası Görelî Etkinlik Ölçümü", Milli Produktivite Merkezi Yayınları, No:483, Ankara.
- ZHU, J., 2001, "Super Efficiency and DEA Sensitivity Analysis" *European Journal of Operational Research*, 129, 443-455.